EGL 定義式

本書の概要

本書では EGL（Entis Graphic Library）で使用している計算式をまとめたものです。
以下に示すセクションから構成されます。

1. 表記
2. 公式
3. 定義式・実装

表記

ベクトル

ベクトルは大文字のアルファベットで表し、一般的にはその元を添え字のついた小文字で表記するものとする。

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}$$

全ての元が 0 のベクトルを o で表記する。

$$o = \{0,0,0\}$$

ベクトルの内積は丸括弧で囲んで表記する。

$$(X, Y) = \sum_i x_i y_i$$

ベクトルの外積は×記号で表記するものとし、次のように定義する。

$$X \times Y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$、但し e_1, e_2, e_3 は基底ベクトルとする。

ベクトルの絶対値は $\|X\|$ のように表記し、その値は次のように定義する。

$$\|X\|^2 = (X, X)$$

公式

ベクトル積の結合則

任意のベクトル X、Y、Z、及び実数 a について次の法則が成り立つ。

$$(aX, Y) = (X, aY) = a(X, Y)$$
$$(aX) \times Y = X \times (aY) = a(X \times Y)$$
$$(X, Y, Z) = (X, Y \times Z) = (X \times Y, Z)$$

ベクトル積

ベクトル X、Y のなす角度を θ とするとベクトルの内積は、

$$(X, Y) = \|X\| \cdot \|Y\| \cos\theta$$

となる。
また、ベクトルの外積に関して

$$\|X \times Y\| = \|X\| \cdot \|Y\| \sin\theta$$

となる。

3 点を含む平面

点 A、B、C を含む平面の方程式は

$$(X - A, (B - A) \times (C - A)) = 0$$

で与えられる。これを、$ax + by + cz + d = 0$ の形式で表した場合、

$$\{a, b, c\} = (B - A) \times (C - A)$$
$$d = (-A, \{a, b, c\})$$

となる。

線分と平面の交点

点 R、S を通る直線と平面 $(X-P,A)=0$ との交点を Q とすると、t を

$$t=-\frac{(P-R,A)}{(S-R,A)}$$

としたとき、交点 Q は

$$Q=R+t\cdot(S-R)$$

で与えられる。
尚、$0\le t\le 1$ のとき、交点 Q は線分 RS に含まれている。

平面とベクトルの角度

平面 $(X-P,A)=0$ とベクトル X のなす角を θ とすると、

$$\sin\theta=\frac{(A,X)}{\|A\|\cdot\|X\|}$$

となる。

平面と点の距離

平面 $(X-P,A)=0$ と位置ベクトル X の距離 r は、平面とベクトル $X-P$ のなす角を θ とすると、

$$r=\|X-P\|\cdot\sin\theta$$

より、

$$r=\frac{(A,X-P)}{\|A\|}$$

となる。

反射ベクトル

平面 $(X-P,A)=0$ に対して、ベクトル X の反射ベクトルを X' は

$$X'=X-2\frac{(X,A)}{\|A\|^2}A$$

で与えられる。

定義式・実装

軸回転

x 軸を中心に θ_x 回転する行列 M^x は

$$M^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix}$$

で与えられる。

同様に、y 軸を中心に θ_y 回転する行列 M^y は

$$M^y = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{pmatrix}$$

z 軸を中心に θ_z 回転する行列 M^z は

$$M^z = \begin{pmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。

回転ベクトル

ベクトル $X = \{x, y, z\}$ を、y 軸、x 軸の順に回転して z 軸上に移動する回転角 θ_y、及び θ_x は

$$\sin\theta_y = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

$$\cos\theta_y = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

$$\sin\theta_x = \frac{-y}{\|X\|}$$

$$\cos\theta_x = \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{\|X\|}$$

で与えられる。

透視変換

点 $X = \{x, y, z\}$ を平面 $z = r$ に投影して出来る点 $X' = \{x', \dot{y}, r\}$ は

$$x' = \frac{r}{z} x$$

$$y' = \frac{r}{z} y$$

で与えられる。

テクスチャマッピング

テクスチャ画像の基準座標を O、基底ベクトルを A、B としたとき、平面 $z = r$ に投影された点 $X' = \{x', y', r\}$ のテクスチャ画像上での座標 $\{u, v\}$ は、まずテクスチャマッピングされる平面上の点 X、及びベクトル P を

$$C = A \times B$$

$$X = \frac{(O, C)}{(X', C)} X'$$

$$P = X - O$$

として求めると、

$$u = \frac{(C, P \times B)}{\|C\|}$$

$$v = \frac{(C, A \times P)}{\|C\|}$$

で得られる。

ここで、ベクトル C と、$P \times B$ 、また $A \times P$ が平行である事に注意すると、

$$u = \frac{\|P \times B\|}{\|C\|}$$

$$v = \frac{\|A \times P\|}{\|C\|}$$

となる。ここで、

$$p = (O, C)$$
$$q = (X', C)$$

とすると、

$$u = \frac{\|(pX' - qO) \times B\|}{q\|C\|}$$
$$v = \frac{\|A \times (pX' - qO)\|}{q\|C\|}$$

となる。
結局、上記式をベクトル C と、$P \times B$ 、また $A \times P$ が平行である事に注意して展開すると、

$$u = \frac{\begin{vmatrix} py' - qo_2 & b_2 \\ pr - qo_3 & b_3 \end{vmatrix}}{qc_1} = \frac{\begin{vmatrix} pr - qo_3 & b_3 \\ px' - qo_1 & b_1 \end{vmatrix}}{qc_2} = \frac{\begin{vmatrix} px' - qo_1 & b_1 \\ py' - qo_2 & b_2 \end{vmatrix}}{qc_3}$$
$$v = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & py' - qo_2 \\ a_3 & pr - qo_3 \end{vmatrix}}{qc_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & pr - qo_3 \\ a_1 & px' - qo_1 \end{vmatrix}}{qc_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & px' - qo_1 \\ a_2 & py' - qo_2 \end{vmatrix}}{qc_3}$$

となる。

ポリゴン当たり判定

点 A、B、C で囲まれた三角形内部に点 P が含まれているかを判定する。
但し、

$$A \neq B, A \neq C, B \neq C$$
$$(B - A, C - A, P - A) = 0$$

とする。
ここで、∠ABC を θ_b 、∠ACB を θ_c とすると、

$$\cos\theta_b = \frac{(A - B, C - B)}{\|A - B\| \cdot \|C - B\|}$$
$$\cos\theta_c = \frac{(A - C, B - C)}{\|A - C\| \cdot \|B - C\|}$$

であり、以下の条件

$$\cos\angle PBA = \frac{(P - B, A - B)}{\|P - B\| \cdot \|A - B\|} \geq \cos\theta_b$$
$$\cos\angle PBC = \frac{(P - B, C - B)}{\|P - B\| \cdot \|C - B\|} \geq \cos\theta_b$$

$$\cos\angle PCA = \frac{(P-C, A-C)}{\|P-C\|\cdot\|A-C\|} \geq \cos\theta_c$$
$$\cos\angle PCB = \frac{(P-C, B-C)}{\|P-C\|\cdot\|B-C\|} \geq \cos\theta_c$$

全てが満たされるとき、点 P は三角形 ABC に囲まれている。

ここで、演算誤差を考慮し、三角形 ABC より距離 r だけ外側に位置している場合も条件に含める場合、

$$\cos\angle PBA = \frac{(P-B, A-B)}{\|P-B\|\cdot\|A-B\|} \geq \cos\theta_b - \frac{r}{\|P-B\|}$$
$$\cos\angle PBC = \frac{(P-B, C-B)}{\|P-B\|\cdot\|C-B\|} \geq \cos\theta_b - \frac{r}{\|P-B\|}$$
$$\cos\angle PCA = \frac{(P-C, A-C)}{\|P-C\|\cdot\|A-C\|} \geq \cos\theta_c - \frac{r}{\|P-C\|}$$
$$\cos\angle PCB = \frac{(P-C, B-C)}{\|P-C\|\cdot\|B-C\|} \geq \cos\theta_c - \frac{r}{\|P-C\|}$$

のようになる。